ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH XUÂN SÁNG

TỨ GIÁC NEWTON, PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA LIÊN KẾT VÀ NGHIỆM HỮU TỈ CỦA CHÚNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Ngô Thị Ngoan

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Ngô Thị Ngoan. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán K12E2 (khóa 2018-2020); Nhà trường và các phòng chức năng của Trường; Khoa Toán – Tin, trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K12E (khóa 2018–2020) đã luôn động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2019

Tác giả

Đinh Xuân Sáng

Mở đầu

"Làm thế nào các câu hỏi hình học có thể quy về phương trình đại số" là một phần nội dung trong cuốn sách Universal Arithmetick của Isaac Newton, được viết năm 1720. Một trong những vấn đề mà Newton đã xử lý là vấn đề tìm đường kính của một đường tròn có một tứ giác lồi nội tiếp trong nó khi biết độ dài cạnh a, b, c, trong khi cạnh thứ tư d là đường kính. Quá trình giải quyết vấn đề này đã đưa ông đến một mối qua hệ giữa các đại lượng a, b, c và d. Mối quan hệ đó được gọi là phương trình Newton

$$d^3 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) d - 2abc = 0. \tag{1}$$

Năm 1915, P. Bachmann đã đưa ra một phương pháp để tìm kiếm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình Newton. Vào tháng 6 năm 1926, N. Anning đã đưa ra bàn luận về phương trình Newton trong một hội nghị Toán học. Bằng cách chia hai vế của phương trình (1) cho d^3, N. Anning đã đưa vấn đề tìm nghiệm của phương trình (1) bằng cách tìm nghiệm của phương trình

$$u^2 + v^2 + w^2 + 2uvw - 1 = 0. \tag{2}$$

Với công thức

$$(u, v, w) = \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}, \frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\gamma\alpha}, \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}\right), \tag{3}$$

vô số nghiệm hữu tỉ đã được tìm thấy khi ông sử dụng một mối quan hệ hài hòa trong số các cosin của các góc của một hình tam giác.

Năm 1955, I. A. Barnett đã xem xét phương trình (2). Ông đã chứng minh rằng tất cả các nghiệm hữu tỉ của nó được đưa ra bởi công thức (3) nếu chúng ta cho phép α, β và γ chạy trên tất cả các số nguyên khác không. Phương pháp của ông, sử dụng đại số tuyến tính thuần túy được mô tả chi tiết trong Chương 2, mà không sử dụng công cụ lượng giác. Việc nghiên cứu của ông hoàn toàn độc lập về mặt ý tưởng với Anning.

Năm 2004, gần đây M. Hajja đã giải phương trình (2) bằng việc dùng cosin của các góc trong một tam giác bất kỳ. Ông kết thúc quá trình giải phương trình (2) với kết quả chính xác giống như của Barnett. M. Hajja cũng đã chứng minh rằng các nghiệm hữu tỉ của phương trình (2) đều được đưa ra bởi công thức (3) với α, β, γ hạn chế là độ dài cạnh của một tam giác nhọn.

Mục đích của luận văn này là trình bày chi tiết 6 phương pháp đưa ra phương trình Newton $d^3 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) d - 2abc = 0$ (1); trình bày chi tiết chứng minh của I. A. Barnett mô tả cách sử dụng đại số tuyến tính trong việc tìm ra tất cả các nghiệm hữu tỉ của phương trình $u^2 + v^2 + w^2 + 2uvw - 1 = 0$ (2); trình bày phương pháp đại số để tìm ra công thức tham số hóa cho các nghiệm hữu tỉ của phương trình (2) theo kết quả của M. Hajja và J. Sondow. Luận văn còn trình bày chi tiết sự tương ứng song hữu tỉ giữa hai công thức nghiệm trên của phương trình (2) và các thuộc tính của các nghiệm dương của phương trình Newton và đa thức đồng hành của nó.

Luận văn gồm hai chương. Chương 1 trình bày vấn đề hình bán nguyệt và 6 phương pháp đưa tới phương trình Newton cùng các kiến thức có liên quan trong quá trình chứng minh các kết quả ở chương 2. Chương 2 là nội dung chính của luận văn. Mục 2.1 trình bày công thức nghiệm của Barnett. Mục 2.2 trình bày phương pháp đại số tìm nghiệm hữu tỉ của phương trình (2). Mục 2.3 trình bày sự tương ứng song hữu tỉ giữa hai công thức nghiệm trong mục 2.1 và mục 2.2. Mục 2.4 trình bày một số tính chất của tập nghiệm và mục 2.5 trình bày về bài toán ngược từ một bộ nghiệm của phương trình Newton liệu có hay không một tứ giác Newton tương ứng.

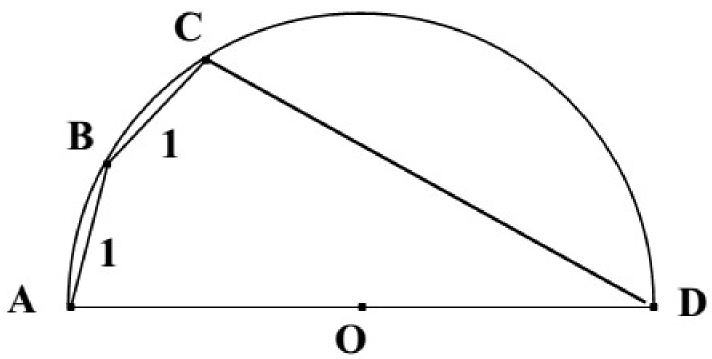
Chương 1

Tứ giác Newton và phương trình bậc ba liên kết

Chương này ta đi tìm hiểu về hình bán nguyệt, vấn đề này là một trong ba ví dụ cốt lõi mà Newton sử dụng để minh họa làm thế nào các vấn đề hình học có thể được chuyển thành ở dạng đại số. Ta tìm hiểu sáu phương pháp tiếp cận khác nhau đưa ra phương trình Newton cùng với đa thức Newton.

1.1 Bài toán mở đầu

Trong kì thi Olympic Toán học Trung cấp Anh năm 2010 'Maclaurin' có câu hỏi sau:



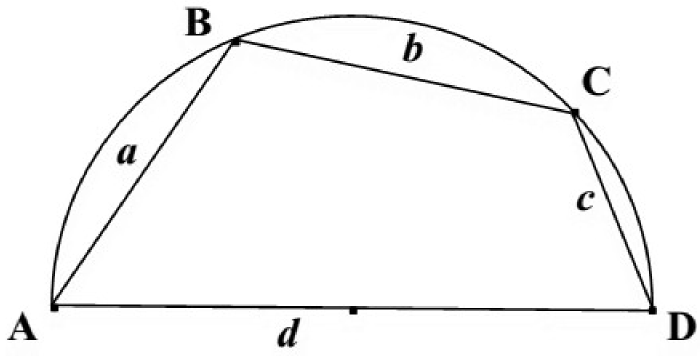
Hình 1.

Cho nửa đường tròn đường kính AD có chiều dài $AD = 4$. Trên nửa đường tròn đó, lấy các điểm B và C, như trong Hình 1, sao cho $AB = BC = 1$.

Tìm chiều dài của đoạn CD.

Một trong ba lời giải bài toán trên gợi lại vấn đề trước đây Newton đã đề cập làm thế nào các vấn đề hình học có thể chuyển thành ở dạng đại số.

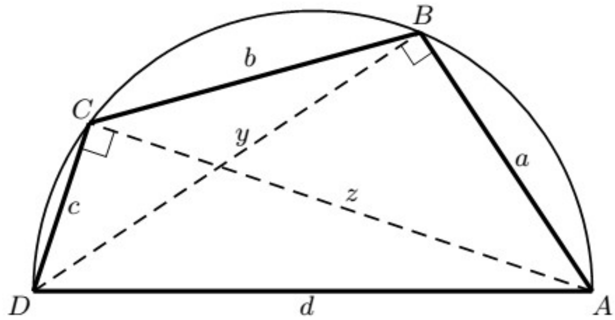
Vấn đề hình bán nguyệt.



Hình 2. Hình bán nguyệt.

Khi bắt tay vào giải đáp vấn đề hình bán nguyệt, Newton đã có những quan sát thú vị rằng, nếu chúng ta được cho a, d, c và được yêu cầu tìm b. Rõ ràng không phức tạp, sử dụng d để vẽ đường tròn đường kính AD, sau đó dựng các dây cung có độ dài a, c trên đường tròn để xác định vị trí B và C. Tuy nhiên, nếu chúng ta đã cho a, b, c và được yêu cầu tìm d, chúng ta không thể bắt đầu quá trình như trên vì chúng ta không thể vẽ vòng tròn ban đầu! Newton đưa ra sáu phương pháp có thể suy ra phương trình bậc ba thể hiện mối quan hệ a, b, c và d với nhau.

Định nghĩa 1.1.1. Một tứ giác Newton là một tứ giác lồi nội tiếp trong một đường tròn về một bên của một đường kính, với một cạnh là đường kính của đường tròn.

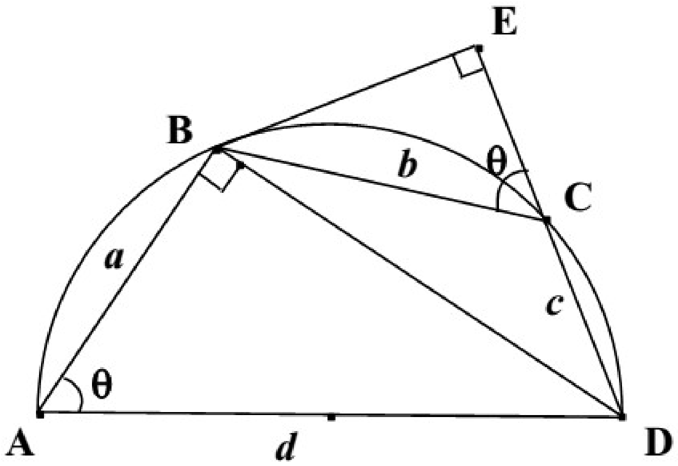


Hình 3. Tứ giác Newton.

Trong hình 3, đa giác $ABCD$ là tứ giác Newton với AD là đường kính, độ dài các cạnh và đường chéo được kí hiệu $AB = a, BC = b, CD = c, DA = a, AC = z, BD = y$. Newton đã đưa ra mối quan hệ giữa độ dài các cạnh và nó được gọi là phương trình Newton $d^3 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) d - 2abc = 0$.

1.2 Sáu phương pháp dẫn tới phương trình Newton

Phương pháp 1. Tam giác đồng dạng I



Hình 4. Tam giác đồng dạng I.

Hạ hình chiếu vuông góc của B là E lên đường thẳng CD. Ta có ABD và CEB là hai tam giác vuông đồng dạng dẫn tới

$$BD = \sqrt{d^2 - a^2}, \quad CE = \frac{ab}{d}, \quad BE = \frac{b}{d}\sqrt{d^2 - a^2}.$$

Lại có $CD = ED - EC$ dẫn tới

$$\begin{aligned}
&CD = \sqrt{BD^2 - BE^2} - EC \\
&\Leftrightarrow c = \sqrt{d^2 - a^2 - \frac{b^2}{d^2}\left(d^2 - a^2\right)} - \frac{ab}{d} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{d^2 - a^2 - \frac{b^2}{d^2}\left(d^2 - a^2\right)} = c + \frac{ab}{d} \\
&\Leftrightarrow d^2 - a^2 - \frac{b^2}{d^2}\left(d^2 - a^2\right) = c^2 + 2\frac{abc}{d} + \frac{a^2b^2}{d^2} \\
&\Leftrightarrow d^4 - a^2d^2 - b^2d^2 + a^2b^2 = c^2d^2 + 2abcd + a^2b \\
&\Leftrightarrow d^4 - a^2d^2 - b^2d^2 - c^2d^2 - 2abcd = 0 \\
&\Leftrightarrow d\left[d^3 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) d - 2abc\right] = 0.
\end{aligned}$$

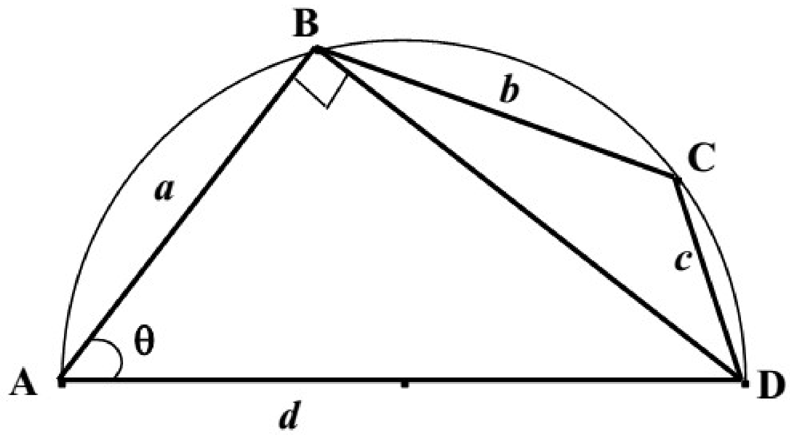
từ đó ta có phương trình Newton

$$d^3 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) d - 2abc = 0.$$

Ngoài ra, từ $BE^2 = BC^2 - CE^2 = BD^2 - DE^2$ cũng đi tới phương trình trên.

Hoàn toàn có thể làm tương tự khi hạ DE vuông góc từ D xuống BC hoặc hạ CE vuông góc từ C xuống BD.

Phương pháp 2. Quy tắc Cosin



Hình 5.

Xét tam giác ABD, theo Định lý Pitago ta có

$$d^2 - a^2 = BD^2.$$

Xét tam giác BCD, theo Định lý Cosin ta có

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(180^o - \theta\right) = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta.$$

Mà

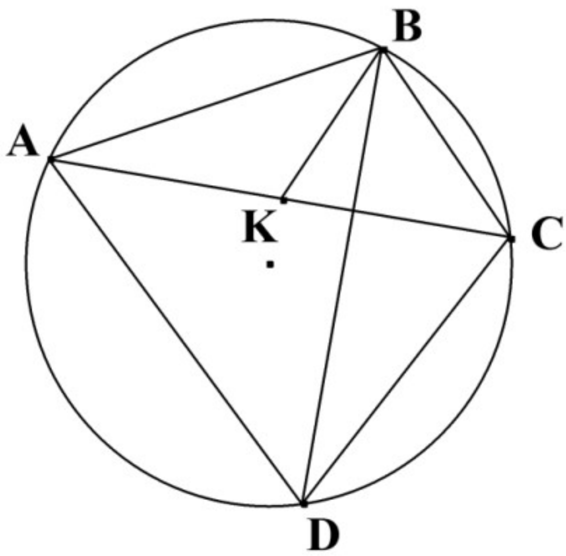
$$cos\theta = \frac{a}{d}.$$

Từ đó, với lưu ý $d \neq 0$ ta có

$$\begin{aligned}
&d^2 - a^2 = b^2 + c^2 + \frac{2abc}{d} \\
&\Leftrightarrow d^3 - a^2 d = b^2 d + c^2 d + 2abc \\
&\Leftrightarrow d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc = 0.
\end{aligned}$$

Bổ đề 1.2.1. (Định lý Ptoleme thuận) *Nếu một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn thì tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối diện.*

Chứng minh. Gọi $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.



Hình 6.

Trên cung nhỏ BC, ta có các góc nội tiếp $\angle BAC = \angle BDC$, và trên cung AB, ta có $\angle ADB = \angle ACB$.

Lấy 1 điểm K trên AC sao cho $\angle ABK = \angle CBD$;

Từ $\angle ABK + \angle CBK = \angle ABC = \angle CBD + \angle ABD$ suy ra $\angle CBK = \angle ABD$.

Do vậy tam giác ABK đồng dạng với tam giác DBC, và tương tự có tam giác ABD đồng dạng với tam giác KBC.

Suy ra:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{CD}{BD}; \frac{CK}{BC} = \frac{DA}{BD};$$

Từ đó

$$AK.BD = AB.CD, \; CK.BD = BC.DA;$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế tương ứng ta có

$$\begin{aligned} & AK.BD + CK.BD = AB.CD + BC.DA \\ \Leftrightarrow & \left(AK + CK\right).BD = AB.CD + BC.DA \\ \Leftrightarrow & AC.BD = AB.CD + BC.DA. \end{aligned}$$

□